**Уравнения и неравенства с параметром**

**История возникновения уравнений и неравенств с параметром**

Задачи на уравнения с параметром встречались уже в астрономическом трактате «Ариабхаттиам», составленном в 499 г. Индийским математиком и астрономом Ариабхаттой. Другой индийский ученый, Брахмагупта (VII в.), изложил общее правило решения квадратных уравнений, приведенных к единой канонической форме:

В уравнении коэффициенты, кроме параметра, могут быть и отрицательными.

***Квадратные уравнения у ал-Хорезми.***

В алгебраическом трактате ал-Хорезми дается классификация линейных и квадратных уравнений с параметром а. Автор насчитывает 6 видов уравнений, выражая их следующим образом:

1) «Квадраты равны корням», т. е.

2) «Квадраты равны числу», т. е. .

3) «Корни равны числу», т. е. .

4) «Квадраты и числа равны корням», т. е. .

5) «Квадраты и корни равны числу», т. е. .

6) «Корни и числа равны квадратам», т. е. .

Формулы решения квадратных уравнений по ал-Хорезми в Европе были впервые изложены в «Книге абака», написанной в 1202 г. Итальянским математиком Леонардо Фибоначчи.

Вывод формулы решения квадратного уравнения с параметром в общем виде имеется у Виета, однако Виета признавал только положительные корни. Итальянские математики Тарталья, Кардано, Бомбелли среди первых в ХII в. учитывают, помимо положительных, и отрицательные корни. Лишь в XVII в. благодаря трудам Жирара, Декарта, Ньютона и других ученых способ решения квадратных уравнений принял современный вид.

**Понятие параметра**

Для начала, стоило бы пояснить, что собой представляют уравнения с параметрами, которым посвящена моя работа. Итак, если уравнение (или неравенство), кроме неизвестных, содержит числа, обозначенные буквами, то оно называется параметрическим, а эти буквы – параметрами.

***Параметр*** - независимая переменная, значение которой считается фиксированным или произвольным числом, или числом, принадлежащим заданному условием задачи промежутку.

***Уравнение с параметром*** — математическое уравнение, внешний вид и решение которого зависит от значений одного или нескольких параметров.

***Решить уравнение с параметром*** означает для каждого значения α найти значения , удовлетворяющие этому уравнению, а также:

1. Исследовать, при каких значениях параметров уравнение имеет корни и сколько их при разных значениях параметров.

2. Найти все выражения для корней и указать для каждого из них те значения параметров, при которых это выражение действительно определяет корень уравнения.

Рассмотрим уравнение , где *α, c, k, x* -переменные величины.

Системой допустимых значений переменных *α, c, k, x* называется любая система значений переменных, при которой и левая и правая части этого уравнения принимают действительные значения.

Пусть **А** – множество всех допустимых значений *α,* **K** – множество всех допустимых значений *k*, **Х** – множество всех допустимых значений *х*, **C** - множество всех допустимых значений *c*. Если у каждого из множеств ***A, K, C, X*** выбрать и зафиксировать соответственно по одному значению *α, k, c,* и подставить их в уравнение, то получим уравнение относительно *x,* т.е. уравнение с одним неизвестным.

Переменные *α, k, c*, которые при решении уравнения считаются постоянными, называются параметрами, а само уравнение называется уравнением, содержащим параметры.

Параметры обозначаются первыми буквами латинского алфавита: *α, b, c, d, …, k , l, m, n,* а неизвестные – буквами *x, y, z.*

Два уравнения, содержащие одни и те же параметры, называются равносильными, если:

а) они имеют смысл при одних и тех же значениях параметров;

б) каждое решение первого уравнения является решением второго и наоборот.

Если параметру, содержащемуся в уравнении (неравенстве), придать некоторое значение, то возможен один из двух следующих случаев:

1) получится уравнение (неравенство), содержащее лишь данные числа и неизвестные (т.е. без параметров);

2) получится условие, лишенное смысла.

В первом случае значение параметра считается допустимым, во втором – недопустимым.

При одних значениях параметров уравнение не имеет корней, при других – имеет только один корень, при третьих – более одного корня.

При решении таких уравнений надо:

1) найти множество всех доступных значений параметров;

2) перенести все члены, содержащие неизвестное, в левую часть уравнения, а все члены, не содержащие неизвестного в правую;

3) привести подобные слагаемые;

4) решать уравнение .

Возможно три случая.

1. *а* 0, *b* – любое действительное число. Уравнение имеет единственное решение .

2. *а* = 0, *b* = 0. Уравнение принимает вид: 0*х* = 0, решениями являются все *х* R.

3. *а* = 0, *b* 0. Уравнение 0*х* = *b* решений не имеет.

**Глава 2. Виды уравнений и неравенств с параметрами**

**Уравнения и неравенства первой степени**

Решить такое уравнение – это значит:

1) определить множество допустимых значений неизвестного и параметров;

2) для каждой допустимой системы значений параметров найти соответствующие множества решений уравнений.

Простейшее уравнение первой степени с одним неизвестным имеет вид .

При уравнение имеет единственное решение , которое будет: положительным, если или ; нулевым, если ; отрицательным, если или .

Если *а* = 0, то при *b* = 0 бесчисленное множество решений, а при *b* 0 решений нет.

*Пример.* Для каждого значения решить уравнение ; найти, при каких корни больше нуля.

Это уравнение не является линейным уравнением (т.е. представляет собой дробь), но при х -1 и х 0 сводится к таковому: или *а –* 1 *– х* = 0.

Мы уже выявили допустимые значения неизвестного (*х* -1 и *х* 0), выявим теперь допустимые значения параметра *а*: .

Из этого видно, что при *х* 0 *а*  1, а при *х* -1 *а* 0.

Таким образом, при *а* 1 и *а* 0 *х* = *а* -1 и это корень больше нуля при *а* > 1.

Ответ: при *а* < 0 *х = а* - 1; при решений нет, а при *a* > 1 корни положительны.

*Пример.* Решить уравнение (1).

Допустимыми значениями *k* и *x* будут значения, при которых .

Приведём уравнение к простейшему виду:

(2)

Найдём *k*, при которых изначальное уравнение не имеет смысла:

Подставив в (2) , получим:

Если подставим , то получим так же .

Таким образом, при уравнение (1) не имеет числового смысла, т.е. - это недопустимые значения параметра *k* для (1). При мы можем решать только уравнение (2).

1. Если , то уравнение (2) и вместе с ним уравнение (1) имеют единственное решение , которое будет:

а) положительным, если , при 4 < k < 9, с учётом : ;

б) нулевым, если ;

в) отрицательным, если и с учётом , получаем .

2. Если , то уравнение (2) решений не имеет.

Ответ: а) при и , причём х > 0 для ; x=0 при k=4; x<0 при ;

б) при уравнение не имеет решений.

*Пример.* Решите неравенство .

Решение. Установим ОДЗ: .

Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

Решаем систему (1).

1. Если , то .
2. Если , то .
3. Если , то .
4. Решая систему (2), учтем, что , если . Поэтому . Ответ легко списать с оси ответа.

*Пример.* При каких значениях неравенство верно при всех *,*удовлетворяющих условию?

Решение. Решим сначала неравенство .

Возможны следующие случаи:

При множество решений данного неравенства включает в себя отрезок . Для того чтобы отрезок принадлежал множеству достаточно, чтобы выполнялось неравенство . Решаем это неравенство:

Аналогично найдем, при каких значениях отрезок принадлежит множеству

Ответ:

Данное неравенство можно решить и графически в системе координат . Пусть . Имеем линейную функцию при любом .

**Квадратные уравнения и неравенства**

Для начала напомню, что квадратное уравнение – это уравнение вида , где *а, b* и *с* – числа.

Условия параметрических квадратных уравнений могут быть различны, но для решений всех их нужно применять свойства обыкновенного квадратного уравнения:

а) Если D > 0, *а* > 0, то уравнение имеет два действительных различных корня, знаки которых при *с* > 0 одинаковые и противоположны по знаку коэффициента *b*, а при *с* < 0, причем по абсолютной величине больше тот, знак которого противоположен коэффициенту *b*.

б) Если D = 0, *а* > 0, то уравнение имеет два действительных и равных между собой корня, знак которых противоположен знаку коэффициента *b*.

в) Если D < 0, *а* > 0, то уравнение не имеет действительных корней.

Аналогично можно представить свойства корней при *а* < 0. Кроме того, в квадратных уравнениях справедливы следующие утверждения:

1. Если поменять местами коэффициенты *а* и *с*, то корни полученного квадратного уравнения будут обратны корням данного.
2. Если поменять знак коэффициента *b*, корни полученного квадратного уравнения будут противоположны корням данного.
3. Если коэффициенты *а* и *с* разных знаков, то уравнение имеет действительные корни.

*Пример.* Найти все значения параметра *а*, для которых квадратное уравнение : а) имеет два различных корня; б) не имеет корней; в) имеет два равных корня.

Данное уравнение по условию является квадратным, поэтому *а* . Рассмотрим дискриминант данного уравнения:

При уравнение имеет два различных корня, т.к. D > 0, при *a* < -1 уравнение корней не имеет, т.к. , а двух одинаковых корней это уравнение иметь не может, т.к. при , а это противоречит условию задачи.

*Пример.* Решить уравнение

При уравнение является линейным , которое имеет единственное решение . А при , уравнение является квадратным и его дискриминант .

При поэтому уравнение корней не имеет. При , поэтому уравнение имеет два совпадающих корня .

При , но , и данное уравнение имеет два различных корня

; .

Ответ: и при a<1, но ; при ; при .

*Пример.* Корни уравнения таковы, что . Найдите *а*.

По теореме Виета и . Возведём обе части первого равенства в квадрат: . Учитывая, что , а , получаем: или , , . Проверка показывает, что все значения удовлетворяют условию.

Ответ: .

*Пример.* Решите уравнение .

Решение.

ОДЗ:

Преобразуем левую часть уравнения, выделив квадрат двучлена:

Переходим к совокупности уравнений:

Решаем сначала каждое уравнение отдельно.

Если , то решений нет.

Если , то .

Если , то решений нет.

Если , то .

Теперь сводим решения на координатной прямой параметра .

Проиллюстрируем полученный ответ в системе координат .

*Пример.* Найдите все значения , при каждом из которых число различных корней уравнения равно числу различных корней уравнения .

Решение. Решаем уравнение (1):

ОДЗ:

Исследование.

Итак, если, то уравнение (1) имеетединственный корень

Рассматриваем уравнение (2):

ОДЗ:

Рассмотрим случаи:

В этом случае действительных корней нет.

*.*

*.*

*.*

.

Уравнение (2) имеет два различных корня

Сравнив оси (1) и (2), получаем ответ.

Ответ: .

**Уравнения и неравенства, содержащие знак модуля**

Для начала, стоит вспомнить, что такое модуль числа. Итак, абсолютной величиной или модулем числа называется само число х, если х положителен, число , если отрицателен, или нуль, если . Значение модуля может быть только положительным.

Чтобы понять решение параметрических уравнений, содержащих знак модуля, лучше всего продемонстрировать решение наглядно, т.е. привести примеры:

*Пример.* Решить уравнение .

Так как, по определению модуля, , то при данное уравнение решений не имеет. Если , то уравнение имеет решение .

Если , то решениями уравнения являются числа и .

Ответ: при решений нет, при , при и .

*Пример.* Решить уравнение . Удобнее всего данное уравнение решить методом интервалов, для двух случаев:

1) ;

2) .

1. Первый интервал:

Второй интервал:

Третий интервал:

2. Первый интервал:

Второй интервал:

Ответ: .

*Пример.* Для каждого значения параметра а найти все значения *х*, удовлетворяющие уравнению .

Рассмотрим 3 промежутка: 1) , 2) , 3)  и решим исходное уравнение на каждом промежутке.

1. ,

,

.

При уравнение не имеет решений, но при *а* ≠ 1 уравнение имеет корень . Теперь надо выяснить, при каких а *х* попадает на промежуток , т.е. Следовательно, исходное уравнение на имеет один корень при , а на остальных *а* корней не имеет.

2. 

,

.

При решением уравнения является любое *х*; но мы решаем на промежутке . Если , то уравнение имеет один корень .

3.

,

.

При решением является любое число, но мы решаем на . Если , то .

Ответ: при; при и при ; при  и при .

**Показательные уравнения и неравенства**

Многие показательные уравнения с параметрами сводятся к элементарным показательным уравнениям вида, где . Область допустимых значений такого уравнения находится как пересечение областей допустимых значений функций и . Для решения уравнения нужно рассмотреть следующие случаи:

1. При решением уравнения является область его допустимых значений .
2. При решением уравнения служит решение уравнения на области допустимых значений .
3. При решение уравнения находится как решение уравнения на области .
4. При уравнение равносильно уравнению на области .
5. При уравнение тождественно уравнению на области .

*Пример.* Решите уравнение:

Решение. ОДЗ уравнения:

1) При уравнение не имеет смысла.

2) При

3) При имеем: или .

4) При получим: или .

5) При имеем: .

6) При прологарифмируем исходное уравнение по основанию , получим:

Ответ: при уравнение не имеет смысла;

при ;

при .

при

при

при .

**Логарифмические уравнения и неравенства**

Решение логарифмических уравнений с параметрами сводится к нахождению корней элементарного логарифмического уравнения. Важным моментом решения уравнений такого типа является проверка принадлежности найденных корней ОДЗ исходного уравнения.

*Пример.* Решите уравнение

Решение. ОДЗ: .

Осуществим на ОДЗ цепочку равносильных преобразований исходного уравнения:

Так как и , сократим обе части уравнения на .

Возведем обе части полученного уравнения в квадрат:

Так как , то .

Для того чтобы значения *х* являлось решением уравнения, должно выполняться условие , то есть .

Выясним, при каких значениях параметра *а* это неравенство истинно:

Так как , то полученная дробь положительна, если , то есть при .

Итак, при , значит при является корнем исходного уравнения.

Ответ: при уравнение не имеет смысла;

при решений нет;

при .

**Глава 3. Методы решения уравнений и неравенств с параметрами**

Методы решения уравнений с параметром:

1. *Аналитический* - способ прямого решения, повторяющего стандартные процедуры нахождения ответа в уравнении без параметров.
2. *Графический* - в зависимости от условия задачи рассматривается положение графика соответствующей квадратичной функции в системе координат.
3. *Координатно-параметрический* - метод решения задач с параметрами, использующий КП-плоскость.

**Аналитический метод**

***Алгоритм решения***

Прежде, чем приступить к решению задачи с параметрами аналитическим методом, нужно разобраться в ситуации для конкретного числового значения параметра. Например, возьмём значение параметра и ответим на вопрос: является ли значение параметра искомым для данной задачи.

Далее уже на конкретном примере попробуем разобраться в аналитическом методе решения уравнений с параметром

*Пример.* Решить относительно *x* линейное уравнение с параметром *m*:

*.*

Умножив обе части уравнения на , получим уравнение , получаем

Отсюда при .

Теперь необходимо проверить, нет ли таких значений , при которых найденное значение равно –3. , решая это уравнение, получаем, что при .

Ответ: при .

**Графический метод**

***История возникновения***

Исследование общих зависимостей началось в 14 веке. Средневековая наука была схоластической. При таком характере не оставалось места изучению количественных зависимостей, речь шла лишь о качествах предметов и их связях друг с другом. Но среди схоластов возникла школа, утверждавшая, что качества могут быть более или менее интенсивными (платье человека, свалившегося в реку, мокрее, чем у того, кто лишь попал под дождь)

Французский ученый Николай Оресм стал изображать интенсивность длинами отрезков. Когда он располагал эти отрезки перпендикулярно некоторой прямой, их концы образовывали линию, названную им "линией интенсивностей" или "линией верхнего края» (график соответствующей функциональной зависимости). Оресм изучал даже "плоскостные" и "телесные" качества, т.е. функции, зависящие от двух или трех переменных.

Важным достижением Оресма была попытка классифицировать получившиеся графики. Он выделил три типа качеств: Равномерные (с постоянной интенсивностью), равномерно-неравномерные (с постоянной скоростью изменения интенсивности) и неравномерно-неравномерные (все остальные), а также характерные свойства графиков таких качеств.

Чтобы создать математический аппарат для изучения графиков функций, понадобилось понятие переменной величины. Это понятие было введено в науку французским философом и математиком Рене Декартом (1596-1650). Именно Декарт пришел к идеям о единстве алгебры и геометрии и о роли переменных величин, Декарт ввел фиксированный единичный отрезок и стал рассматривать отношения других отрезков к нему.

Таким образом, графики функций за все время своего существования прошли через ряд фундаментальных преобразований, приведших их к тому виду, к которому мы привыкли. Каждый этап или ступень развития графиков функций - неотъемлемая часть истории современной алгебры и геометрии.

Графический способ определения числа корней уравнения в зависимости от входящего в него параметра является более удобным, чем аналитический.

***Алгоритм решения графическим методом***

График функции — множество точек, у которых абсциссы являются допустимыми значениями аргумента *x*, а ординаты — соответствующими значениями функции *y*.

Алгоритм графического решения уравнений с параметром:

1. Находим область определения уравнения.
2. Выражаем α как функцию от *х*.
3. В системе координат строим график функции *α(х)* для тех значений *х*, которые входят в область определения данного уравнения.
4. Находим точки пересечения прямой , с графиком функции *α(х)*.Если прямая пересекает график *α(х)*, то определяем абсциссы точек пересечения. Для этого достаточно решить уравнение относительно *х*.
5. Записываем ответ.

**Координатно-параметрический метод**

Пусть на плоскости даны две взаимно перпендикулярные с общим началом (точкой ) числовые оси. Одну из них назовем координатой; другую — параметрической, а плоскость — координатно-параметрической, или КП-плоскостью.

Метод решения задач с параметрами, использующий КП-плоскость, назовём координатно-параметрическим, или КП-методом.

Он основан на нахождении множества всех точек КП-плоскости, значения координаты и параметра каждой из которых удовлетворяют заданному в условиях задачи условию (соотношению).

Если указанное множество точек найдено, то можно каждому допустимому значению параметра поставить в соответствие координаты точек этого множества, дающие искомое решение задачи, или указать те значения параметра, при которых задача не имеет решения.

***Решение КП-методом уравнений с параметрами***

Рассмотрим уравнение

где - некоторая функция переменной и числового параметра .

Пусть на КП-плоскости найдено множество всех точек, значения координаты и параметра каждой из которых удовлетворяют рассматриваемому уравнению.

Может оказаться, что при любом допустимом значении параметра уравнение решений не имеет , либо для некоторых значений параметра или уравнение имеет конечное число решений, или бесконечное множество.

Записывая ответ, поставим в соответствие каждому допустимому фиксированному значению параметра значения искомой величины — координаты соответствующих точек найденного множества.

Отметим два частных случая.

1°. Координата есть функция параметра :

неявно заданная уравнением (В.1). (Вопросы существования неявно заданной функции рассматриваются в курсе высшей математики.)

На КП-плоскости с горизонтальной параметрической осью множество всех точек, значения координаты и параметр каждой из которых удовлетворяют уравнению (В.1), представляет собой график функции (В.2), где роль аргумента функции играет параметр.

2°. Параметр есть функция координаты :

неявно заданная уравнением (В.1).

В этом случае можно рассматривать КП-плоскость с вертикальной параметрической осью и интерпретировать множество всех точек, значения координаты и параметры каждой из которых удовлетворяют уравнению (В.1), как график функции (В.З), где роль аргумента функции играет координата.

Следует отметить, что в рассматриваемом КП-методе центральное место занимает нахождение множества всех точек КП-плоскости, определяемых уравнением (В.1).

Более просто обстоит дело, когда левой частью уравнения (В.1) являются многочлены первой или второй степеней.

Так в курсе аналитической геометрии доказывается, что уравнения вида

где — многочлен второй степени относительно и , определяет на КП-плоскости линии: эллипс (в частности, окружность), гиперболу, параболу или пару прямых (пересекающихся, параллельных или сливающихся в одну). Например, на КП-плоскости уравнения

определяют соответственно окружность, гиперболу и параболу, а уравнение

определяет пару пересекающихся (взаимно перпендикулярных) прямых.

***Метод «частичных областей» (МЧО) при решении неравенств и систем неравенств, содержащих параметры***

Идея так называемого в прикладной математике метода «частичных областей» (МЧО) заключается в том, что решение задачи в исходной области сводится к решению ее или совокупности более простых задач в каждой из «частичных областей», из которых составляется исходная область.

Так же как метод «промежутков» (в одномерном случае), МЧО может быть применен при решении КП-методом уравнений и неравенств с параметрами, содержащих переменную и параметр под знаком абсолютной величины.

Применение МЧО при решении неравенств с параметрами во многом аналогично применению метода «интервалов» для решения неравенств с одной переменной.

*Пример.*

Для примера решим систему различными способами.

Решение.

***1 способ.***

Решим сначала *графически* в системе координат *(аОх)*. Представим уравнение системы в виде

Строим прямые с уравнениями . Неравенство задает в плоскости два множества точек: 1) расположенных не ниже прямой ; 2) не выше прямой .

Ответ:

*.*

*.*

*.*

***2 способ.***

А теперь решим систему *аналитически*. Воспользуемся тремя координатными прямыми для параметра : на первой оси покажем, когда является корнем, на второй — , а на третьей оси сведем эти два случая.

Пусть . Подставим вместо в неравенство ;

.

Если , то .

Если , то .

Пусть . Тогда получим неравенство.

Если , то .

Если , то .

**Глава 4. Практическое применение параметра**

**Применение параметра в решении задач по экономике**

Предприятие производит телевизоры и является прибыльным. Известно, что при изготовлении «телевизоров в месяц расходы предприятия на выпуск одного телевизора составляют не менее тысяч рублей, а цена реализации каждого телевизора не превосходит тысяч рублей. Определить ежемесячный объем производства, при котором может быть получена наибольшая в данных условиях прибыль. Данная задача является простейшим примером задач на оптимизацию, что характерно для любой экономической системы. Приведем решение этой задачи, имеющей любопытные выводы.

***Решение.*** Средние издержки производства, т.е. расходы предприятия на изготовление одного телевизора, заданы. Следовательно, можно составить функцию полных издержек:

Построим график этой функции.

**162000**

**450**

***n***

***C(n)***

Заметим, что заданная в условии функция полных издержек производства отражает факт суммарных издержек при увеличении объема производства. Действительно, при выпуске менее 450 телевизоров в месяц издержки равны 360 тысячам рублей и 180 тысячам рублей при выпуске более 450 телевизоров в месяц. Найдем теперь возможную прибыль (в данном случае — зависимость прибыли от количества изготовленных и проданных телевизоров). Так как цена реализации каждого телевизора не превосходит тысяч рублей, то возможная прибыль не превосходит величины, равной

Приводя подобные члены и выделив полный квадрат, получим, что

Построим график.

**0**

**270000**

**300**

***n***

***P(n)***

**600**

**900**

Как видно, максимально возможное значение прибыли, равное 27000 тыс. рублей, достигается при выпуске как 300 телевизоров в месяц, так и при выпуске 600 телевизоров в месяц. Причем при выпуске более 900 телевизоров в лень производство становится нерентабельным.

Однако при выборе окончательного реального ответа на вопрос, поставленный в условии задачи, необходимо учитывать следующее: большему объему производства соответствует снижение цен на рынке н увеличение занятости населения. С другой стороны, производство и сбыт меньшего количества продукции организовать легче, но это ведет к уменьшению занятости. Как видим, в этой задаче затрагивается проблема применения обоснования конкретных управленческих решений.

**Приложения**

**Приложение 1**

Найдите все значения параметра *а*, при каждом из которых система имеет решение, но среди этих решении нет ни одного, удовлетворяющего условию .

Решение. Разделив обе части первого неравенства на , получим, что неравенство приобретет следующий вид: . Рассматривая левую часть неравенства как квадратный трехчлен относительно , разложим данное выражение на множители.

Таким образом, первое неравенство системы задает на координатной плоскости кольцо, ограниченное двумя концентрическими окружностями с центром в точке и радиусами, равными соответственно 2 и 3.

Преобразуем второе уравнение данной системы .

Следовательно, уравнение системы задает на координатной плоскости окружность с центром в точке (4; -4) и радиусом, зависящим от параметра и равным

Искомая система будет иметь хотя бы одно решение, если окружность, имеющая меняющийся радиус, будет иметь с кольцом хотя бы одну точку. Однако среди решений не будет решений, удовлетворяющих условию , если окружность будет иметь две точки пересечения только с внутренней окружностью кольца. Заметим, что в этом случае должно выполняться условие . .

Получим:

Ответ:.

**Приложение 2**

В двух бригадах работает более 27 человек. Число рабочих первой бригады более чем в два раза превосходит число рабочих второй бригады, уменьшенное на 12. Число рабочих второй бригады более чем в 9 раз превосходит число рабочих первой бригады, уменьшенное на 10. Сколько рабочих в каждой бригаде?

Решение. Основной идеей решения является тот ясный факт, что число рабочих каждой бригады — натуральное число.

Таким образом, нас будут интересовать только точки с целочисленными координатами, лежащие во множестве точек, заданных условием задачи.

Построим геометрическое место точек, задаваемое неравенствами:

Искомое геометрическое место точек — треугольник, внутри которого лежит единственная точка с целочисленными координатами .

Аналитическое решение. Основным условием нахождения аналитического решения задачи является целочисленность переменных.

Имеем:

Из второго и третьего неравенств данной системы получим, что .

Следовательно, . Так как количество рабочих каждой бригады — натуральное число, то . С другой стороны, т.к. , то, по крайней мере, . Таким образом, . Из первых двух неравенств получим, что . Следовательно, .

Ответ: число рабочих первой бригады — 11 человек, а второй бригады — 17 человек.

**Приложение 3**

Найдите все значения параметра , при каждом из которых значение выражения неравно значению выражения ни при одном значении переменной .

Решение. Так как , то условие исходной задачи равносильно следующему: найти все значения параметра , при каждом из которых система не имеет решения.

Проводя равносильные преобразования, получим:

Введем новую переменную. Квадратичная функция , заданная на промежутке имеет множеством значений отрезок . Это означает, что если . Тогда полученная система запишется следующим образом:

Полученная система, а вместе с ней и исходная задача не будут иметь решения, если .

Ответ: .