Древнегреческие математики поставили три задачи, получившие большую известность: удвоение куба, трисекция угла и квадратура круга. По-видимому, довольно быстро была осознана (хоть и не доказана) неразрешимость этих трех задач классическими геометрическими методами греков, то есть при помощи построения только циркулем и линейкой (без делений). Тем не менее, греческие математики продолжали заниматься указанными задачами, предлагая другие способы для их решения (использующие не только циркуль и линейку), и развитие этих методов существенно обогатило математику. Эти новые методы состояли либо в использовании специальных инструментов, отличных от циркуля и линейки, либо в рассмотрении точек пересечения неких кривых (не сводящихся к прямым и окружностям), которые, в свою очередь, получались бы при пересечении определенных поверхностей друг с другом. Хотя некоторые древнегреческие математики построили новые инструменты для решения указанных задач, в целом существовала тенденция считать подобные «механические» решения несовершенными: в тогдашней математике существовала установка на идеальное умозрение и сугубо логическое доказательство, чему в большей степени соответствовало исследование пересечений поверхностей и кривых. Попытки решения данных задач привели к открытию ряда новых кривых и исследованию их свойств.

Удвоение куба. Задача об удвоении куба заключалась в том, чтобы построить ребро куба в 2 раза большего объема, нежели данный. О происхождении этой задачи существовала легенда, что во время эпидемии чумы оракул, спрошенный о том, как избавиться от нее, ответил, что для этого необходимо увеличить вдвое жертвенник, имеющий форму куба; как только это было сделано, чума закончилась. Легенда, по-видимому, была сложена уже после того, как греческие геометры стали заниматься этой задачей. У греков произведение двух величин понималось не как определенное абстрактное «число», а как площадь некоторой фигуры, и, аналогично, произведение трех величин интерпретировалось как объем пространственного тела. Найти куб вдвое большего объема значило построить ребро куба, равновеликого прямоугольному параллелепипеду, состоящему из двух одинаковых сложенных вместе кубов.

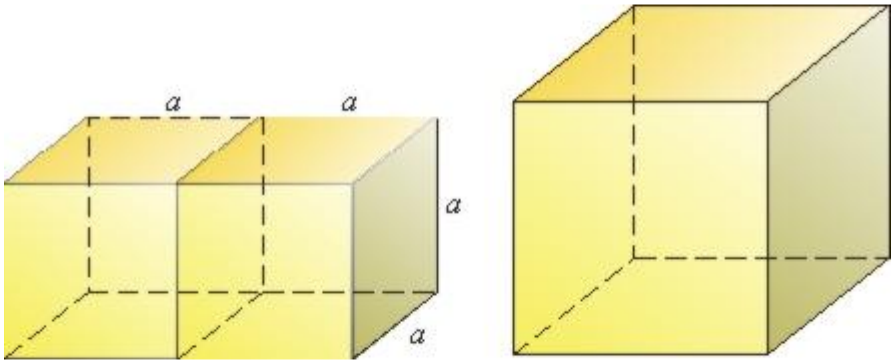

Рис. 1. Задача об удвоении куба

Эта задача представляла собой частный случай более общей задачи – по данному прямоугольному параллелепипеду построить куб одного с ним объема. По-видимому, интерес к этой задаче возник в связи с аналогичной по формулировке, но гораздо более легко решаемой задачей о построении квадрата, равновеликого данному прямоугольнику. Это было одной из элементарных задач так называемой геометрической алгебры греков.

Существуют и другие формулировки задачи о кубе.

Решение

1. Первое известное решение задачи об удвоении куба принадлежит Архиту Тарентскому.

   Оно довольно сложное, поэтому, если вы почувствуете, что в какой-то момент перестаете его понимать, и вам не очень хочется вникать во все детали, смело пропускайте и читайте начиная, с пункта 2.

   Пусть требуется найти 2 средних пропорциональных между данными отрезками a и b, где b > a (в частном случае может быть b = 2a, тогда первое из искомых средних пропорциональных, как уже говорилось, будет равно ребру куба, в два раза большего, чем куб с ребром a, но ни в этом решении, ни в других, излагаемых ниже, ничего не меняется от того, рассматриваем ли мы этот частный случай или общий случай, в котором b может и не равняться 2a).

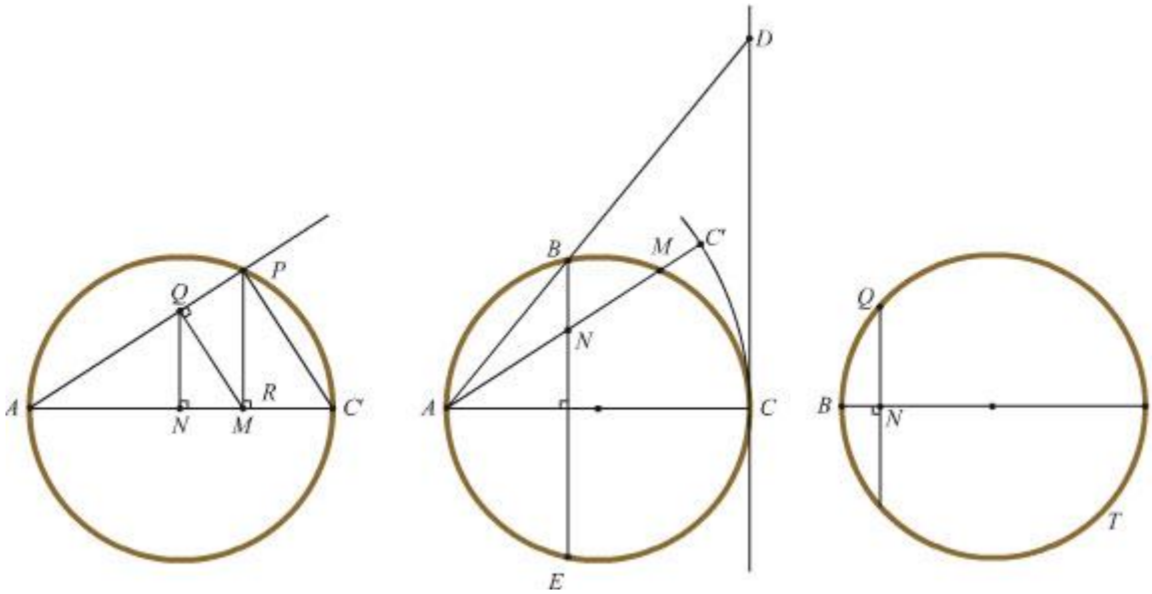

Рис. 2. Вспомогательные построения для решения Архита Тарентского

Построим окружность S с диаметром AC = b, пусть B лежит на этой окружности и AB = a, а точка D лежит на пересечении прямой AB и касательной к окружности S в точке C. Пусть, кроме того, l – прямая, проходящая через A и перпендикулярная плоскости окружности S, а S' – окружность, получаемая поворотом окружности S на 90º относительно оси AC (плоскости окружностей S и S' перпендикулярны друг другу, а диаметр AC у них общий). Рассмотрим три поверхности:

- цилиндр с основанием S;
- конус, получаемый вращением прямой AD вокруг оси AC;
- вырожденный тор – поверхность, получаемой вращением окружности S' относительно оси l.

Пусть все три поверхности пересекаются в некоторой точке P, а M – проекция этой точки на плоскость окружности S.

Так как P принадлежит цилиндру, M лежит на окружности S.

Так как P принадлежит тору, она принадлежит некоторой окружности S" диаметра b, плоскость которой перпендикулярна окружности S и которая проходит через точку A. Пусть эта плоскость пересекает плоскость окружности S по некоторой прямой (частью которой является диаметр AC′ окружности S"), тогда и точка M принадлежит этой прямой и лежит на диаметре AC′ окружности S".

Так как P принадлежит конусу, углы PAC и BAC равны. Пусть Q – точка отрезка AP, такая, что AQ = a = AB, а N – проекция точки Q на плоскость окружности S (легко видеть, что N принадлежит прямой AM – проекции прямой AP на ту же плоскость). Так как и B, и Q принадлежат конусу и равноудалены от его вершины A, они принадлежат некой окружности T, плоскость которой перпендикулярна оси конуса AC, а центр лежит на этой оси. Диаметром окружности T является хорда окружности S, перпендикулярная диаметру AC; одним из концов этой хорды является точка B, а другой обозначим E. Точка N также принадлежит этой хорде, а так как NQ перпендикулярно BE, получается $BN \cdot EN = NQ^2$, а поскольку N принадлежит и хорде AM, $BN \cdot EN = AN \cdot MN$. Следовательно, $NQ^2 = AN \cdot MN$, или $AN : NQ = NQ : MN$. Из этого следует, что прямоугольные треугольники ANQ и QNM подобны, а значит, углы AQN и QMN равны и угол AQM прямой. Прямоугольные треугольники AQM, AMP и AMC′ подобны, и $AQ : AM = AM : AP = AP : AC'$. Таким образом, AM и AP – искомые средние пропорциональные между AQ = a и AC′ = b. В частности, если b = 2a, то $AM = a\sqrt[3]{2}$ – ребро куба, в 2 раза большего по объему, чем куб с ребром a.

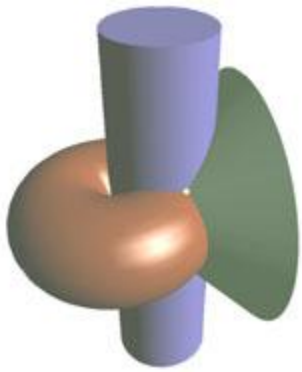

Рис. 3. Решение

Архита Тарентского

2. Другие два решения предложил Менехм.

   В первом из них решение искалось как точка пересечения двух парабол, а во втором – как точка пересечения параболы и гиперболы.

   В современных обозначениях первое решение является графическим решением системы двух уравнений:

$$\begin{cases} x^2 = ay, \\ y^2 = bx. \end{cases}$$

   Графиками этих уравнений являются две параболы с взаимно перпендикулярными осями. Из первого уравнения $y = x^2/a$, при подстановке этого выражения во второе уравнение получаем $x^4/a^2 = bx$, откуда $x^3 = a^2b$, и $x = \sqrt[3]{a^2b}$, в частности, если $b = 2a$, то $x = a\sqrt[3]{2}$.

   Второе решение по сути представляет собой графическое решение системы двух уравнений:

$$\begin{cases} x^2 = ay, \\ xy = ab. \end{cases}$$

   Графиком первого является парабола с осью Oy, графиком второго – гипербола с асимптотами Ox и Oy. Из первого уравнения $y = x^2/a$, при подстановке этого выражения во второе уравнение получаем $x^3/a = ab$, откуда снова $x = \sqrt[3]{a^2b}$.

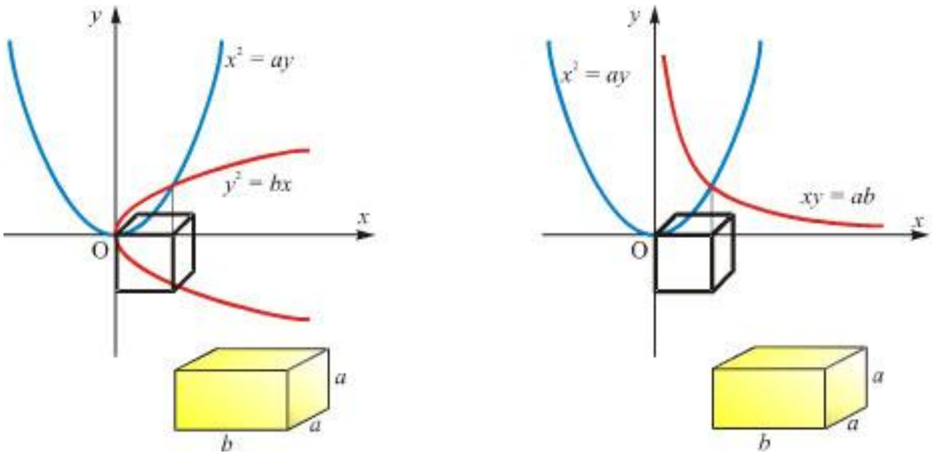

Рис. 4. Решения Менехма

Графиков функций, в современном смысле слова, греки не знали. Параболу и гиперболу Менехм находил как сечения конуса плоскостями (конические сечения). Возможно, именно он и ввел термин «конические сечения», и первым стал изучать их свойства, тем самым открыв важную страницу в истории математики.

3. Евтокий приписывает Платону решение задачи удвоения куба с помощью специального прибора. Сообщение Евтокия сомнительно, так как Платон признавал в математике лишь умозрительные логические доказательства и отвергал построения с помощью механизмов, которыми, с его точки зрения, надлежит пользоваться лишь ремесленникам. Но, возможно, Платон предложил данное решение, насмехаясь над теми, кто использует в математике механические приспособления.

Прибор, описанный у Евтокия, состоит из жесткого прямого угла, вдоль одной стороны которого может свободно двигаться перпендикулярная ей прямая, всякий раз параллельная, таким образом, другой стороне (обозначим эту движущуюся прямую l, сторону жесткого угла, по которой она движется, m, другую его сторону – n, вершину угла X, а точку пересечения прямых l и m обозначим Y). Начертим две перпендикулярные прямые p и q, пересекающиеся в точке O, и отложим на прямой p отрезок OA = a, а на прямой q отрезок OB = b. Расположим жесткий прямой угол прибора так, чтобы его сторона n проходила через точку A, а точка X лежала на прямой p по другую сторону от точки O, чем точка B. Сторона m должна пересекать прямую q по другую сторону от точки O, чем точка A. Движущуюся прямую l установим так, чтобы она проходила через точку B. Теперь необходимо, вращая прибор вокруг точки A и каждый раз проверяя положение точки X на прямой p, добиться того, чтобы точка Y оказалась на прямой q. Когда это произойдет, в силу подобия прямоугольных треугольников выполнится соотношение OA : OX = OX : OY = OY : OB, откуда $OX = \sqrt[3]{a^2 b}$, и если b = 2a, то $AM = a\sqrt[3]{2}$.

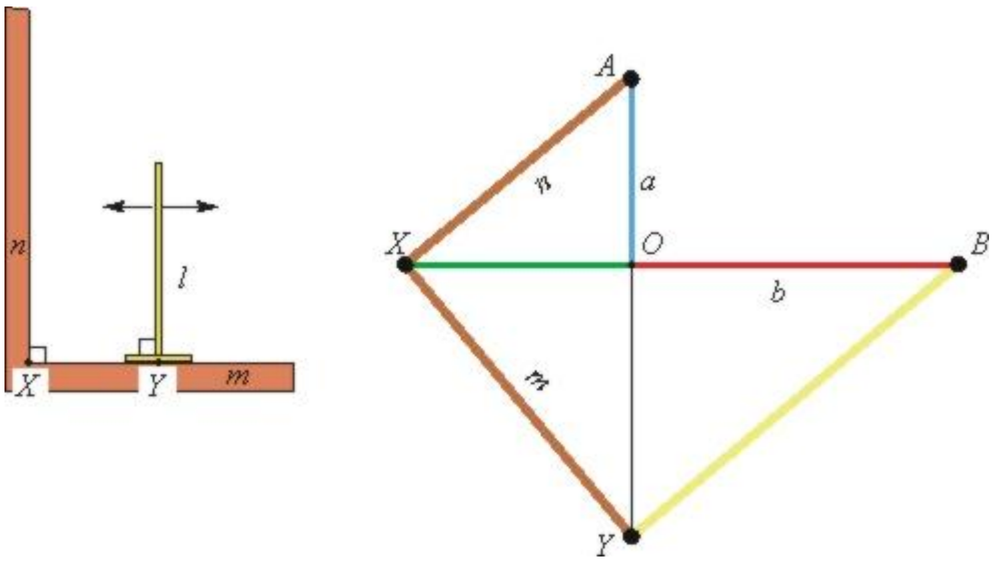

Рис. 5. Механизм Евтокия для решения задачи об удвоении куба

4. Другое механическое приспособление для решения задачи удвоения куба придумал Эратосфен Киренский.

Его прибор состоит из трех одинаковых прямоугольников $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ и $A_3B_3C_3D_3$, на которых нарисованы диагонали A_1C_1, A_2C_2 и A_3C_3. Противоположные стороны прямоугольников (A_1B_1 и C_1D_1, A_2B_2 и C_2D_2, A_3B_3 и C_3D_3) могут свободно двигаться по двум параллельным прямым. Пусть расстояние между прямыми равно b, а на стороне B_3C_3 отмечена точка M такая, что $C_3M = a$.

Будем двигать второй прямоугольник так, чтобы точка A_2 не выходила за пределы первого прямоугольника, а второй – так, чтобы точка A_3 не выходила за пределы второго.

Тогда при движении второго прямоугольника точка пересечения прямых A_2C_2 и B_1C_1 (обозначим эту точку K) будет проходить отрезок B_1C_1. Назовем L точку пересечения прямых A_3C_3 и B_2C_2.

Если прямоугольники находятся в таком положении, что точки A_1, K, L и M все лежат на одной прямой, треугольники A_1KC_1, KLC_2 и LMC_3 подобны между собой, также как и треугольники $A_1C_1D_1$, KC_2C_1 и LC_3C_2, и трапеции $A_1KC_1D_1$, KLC_2C_1 и LMC_3C_2, и поэтому $a : LC_2 = LC_2 : KC_1 = KC_1 : b$. Таким образом, $LC_2 = \sqrt[3]{a^2b}$, и если $b = 2a$, то $LC_2 = a\sqrt[3]{2}$.

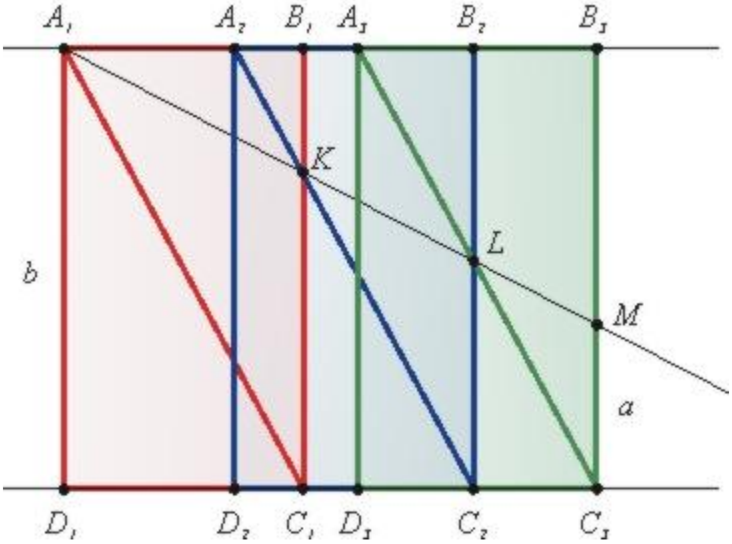

Рис. 6. Решение Эратосфена Киренского